CENTRE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

CRM

G. Laumon - Homologie des fibres de Springer tronquées 6/27/06
(w. P-H. Chaudouard)

Lemme Fondamental pondéré (Arthur) ... generalise L.F. de Langlands - Shelstad ... necessaire pour stabilisation de la formule de traces & pour calculer la fonction de Hasse-Weil des variétés de Shimura non compactes

L.F. ordinaire: identité entre intégrales orbitales

$$\int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} 1_K(g^{-1}\gamma g)\, dg$$

où G/F reductive, F local non-arch

$\gamma \in G(F)$ reg ss

$K \subset G(F)$ sous-groupe compact max.

$F \supset \mathbb{Q}$: Waldspurger : il suffit de considerer le cas $F \supset \mathbb{F}_q((t))$ d'égale caracteristique.

$F \supset \mathbb{F}_q((t))$ integ. orb = # points de varietes algebrique / $\mathbb{F}_q$: fibres de Springer affines (Kazhdan - Lusztig)

---> interpretation cohomologique grace à la dictionnaire fonctions-faisceaux

Cohomologie equivar. : Goresky Kottwitz Macpherson ont demontré la LF ordinaire pour γ non ramifiés et d'égale valuation.

1. Cohomologie Equivariante $k \supset \mathbb{F}_q$ $k = \bar{k}$

X/k projectif, $\ell \neq car(k)$, $\bar{\mathbb{Q}}_\ell \supset \mathbb{Q}_\ell$

$T \circlearrowright X$ tore algebrique, agissant de maniere linéaire

$$H^*_T(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^*_T(X) = \bigoplus_n H^n_T(X) = H^*([X/T])$$

$X = \mathrm{Spec}\, k$, $\quad H^{2\bullet}_T(\mathrm{Spec}\, k) = \mathrm{Sym}^\bullet X^*(T) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$

$$H^{2\bullet+1}_T(\mathrm{Spec}\, k) = (0)$$

.... $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-algèbre gradué qui agit sur $H^\bullet_T(X)$ par cup produit

S.s. de Leray : $[X/T] \longrightarrow [\mathrm{Spec}(k)/T]$

$$E_2^{pq} = H^p_T(\mathrm{Spec}\, k) \otimes H^q(X) \Longrightarrow H^{p+q}_T(X)$$

$\Longrightarrow$ $H^\bullet_T(X)$ est un module de type fini $/ H^\bullet_T(\mathrm{Spec}\, k)$

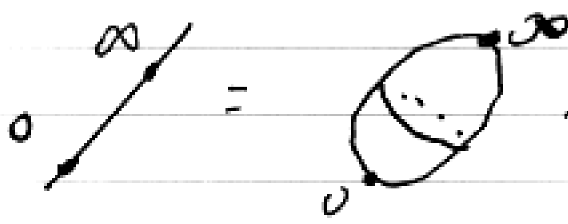
le cas le plus utile : on sait a priori une pureté de $H^q(X)$ de poids q $\forall q$
... automatique si X est lisse.
(mais fibres de Springer classiques ont cet propriété sans être lisses)

Si $H^\bullet(X)$ est pure • la suite spectrale dégénère en E_2

• $H^\bullet_T(X) \hookrightarrow H^\bullet_T(X^T)$ points fixes
injection de $H^\bullet_T(\mathrm{Spec}\, k)$ libres de rang fini
(Atiyah-Segal localisation).

• $H^\bullet(X) = H^\bullet_T(X) / H^{\bullet>0}_T(\mathrm{Spec}\, k)\, H^\bullet_T(X)$

2. Les ballons de GKM :



ballon. $\quad X \circlearrowleft T$,

$X_0 = X^T$

X_1 = ensemble de T-orbites de dim ≤ 1 (réunion)

$X_0 \subset X_1 \subset X$ fermés.

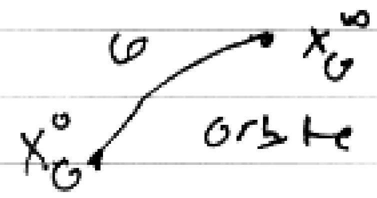
Lemme (Chang-Skjelbred) Si $H^\bullet(X)$ est pure alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^\bullet_T(X) \longrightarrow H^\bullet_T(X_0) \longrightarrow H^\bullet_{T,1}(X_1 \setminus X_0)$$

$$\| \qquad H^\bullet_T(X_1, X_0)$$

$\underbrace{H^\bullet_T(X_1, X_0)}_{\text{ne dépend que de } X_1 \setminus X_0 \text{ avec action de } T.}$

Hypothèses X_0 est fini et orbites de dim $=1$ aussi. + pureté



$$\forall x \in \mathcal{O} \quad T_\mathcal{O} = \text{Fixateur}_T(x)^\circ \text{ tore de codim } 1$$

Thm $\quad H^\bullet_T(X) \subset \bigoplus_{x \in X_0(k)} \mathrm{Sym}^\bullet X^*(T) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$

$$\| $$

$$\left\{ (c_x)_{x \in X_0(k)} \;\middle|\; c_{x_\mathcal{O}^0}\big|_{X_*(T_\mathcal{O})} = c_{x_\mathcal{O}^\infty}\big|_{X_*(T_\mathcal{O})} \text{ pour } \forall \mathcal{O} \text{ de dim}=1 \right\}$$

$$c_x : X_*(T) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

3. Fibres de Springer affines : $\quad F = k((\varpi)) \quad \mathcal{O} = k[[\varpi]]$

$G/k \qquad X^G(k) = G(F)/G(\mathcal{O})$ Grassmannienne affine

... ind-k-schéma.

$T \subset G \qquad \gamma \in \varpi \mathcal{O} \otimes_k \mathfrak{t} \subset F \otimes_k \mathfrak{g}$ régulier :

$\alpha'(\gamma) \neq 0$ où α' = dérivée de α

$\forall \alpha \in \Phi(G,T)$ racines.

fibres de Springer affine $X_\gamma^G \subset X^G$:

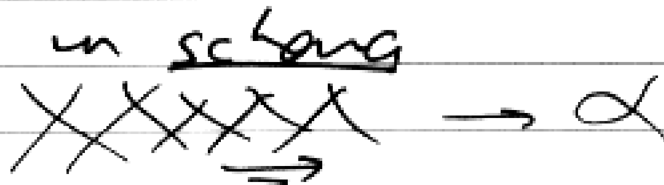
$$X_\gamma^G(k) = \{ g\, G(\mathcal{O}) \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})(\gamma) \in \mathcal{O} \otimes_k \mathfrak{g} \}$$

$T(F) = \varpi^{X_*(T)} \times T \times (1+\varpi\mathcal{O} \otimes_k Z)$

$F^\times = \varpi^{\mathbb{Z}} \times k^\times \times (1+\varpi\mathcal{O})$

$T(F)$ agit par translation sur X_γ^G parce que
$T(F) = \mathrm{Cent}_{G(F)}(\gamma)$

<u>Thm</u> (Kazhdan-Lusztig) X_γ^G est un <u>schéma</u> (pas ind-schéma) de type fini



tel que le réseau $\varpi^{X_*(T)}$ agit librement et le quotient $X_\gamma^G / X_*(T)$ est une variété projective de dim. finie.

$(X_\gamma^G)_0 = X^T$ grass. affine de $T = T(F)/T(\mathcal{O}) \subset G(F)/G(\mathcal{O})$
$\simeq X_*(T)$

$$(X_\gamma^G)_1 \setminus (X_\gamma^G)_0 = \bigcup_{\alpha \in \Phi(G,T)/\sim} (X_\gamma^{H_\alpha} \setminus X^T)$$

racines, $\alpha \sim \pm\alpha$

où H_α = groupe "sl_2" associé à α $\langle T, U_\alpha, U_{-\alpha}\rangle$

4. <u>Homologie équivariante</u> des fibres de Springer affines

$H_\bullet^T(X) = \mathrm{Hom}(H_T^\bullet(X), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ on dualise pour éviter des limites projectives.

$H_T^\bullet(\mathrm{Spec}\, k)$

$H_\bullet^T(\mathrm{Spec}\, k) = \mathcal{O}(\hat{T})$ algèbres de fonctions

$T/k \rightsquigarrow \hat{T}/\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ tore dual de Langlands

$H^{\cdot}_{T}(\mathrm{Spec}\, k) = \mathcal{D}(\hat{\mathfrak{t}})$ op. différent. à coeff. constants
opère sur $\mathcal{O}(\hat{\mathfrak{t}})$ fonctions polynom.

$\alpha \in \Phi(G,T)$ $\quad f_\alpha : \hat{\mathfrak{t}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$

∂_α diff. $\quad \partial_\alpha(f_\alpha) = 2 \quad (\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2)$

algèbre de groupe $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[X_*(T)] = \mathcal{O}(\hat{T})$

<u>Thm</u> (GKM) 1. Si la cohomologie est pure pour X_γ^G,
on a
$$H_\bullet^T(X_\gamma^G) = \mathcal{O}(\hat{T}) \underset{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}{\otimes} \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{t}}) \Big/ \sum_{\alpha \in \Phi/\pm} L_{\alpha,\gamma}$$
où
$$L_{\alpha,\gamma} = \sum_{d=1}^{\mathrm{val}(\alpha'(\gamma))} (1-\alpha^\vee)^d \, \mathcal{O}(\hat{T}) \otimes \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{t}})\{\partial_\alpha^d\}$$

$\mathrm{Ker}\,(\partial_\alpha^d : \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{t}}) \to \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{t}}))$

2. Si $\mathrm{val}(\alpha'(\gamma))$ ne dépend pas de α,
$H^\bullet(X_\gamma^G)$ est pure.

5. Lemme Fondamental géométrique

G adjoint, $\hat{T} \subset \hat{G}$ simplement connexe

$\Rightarrow$ centralisateurs $\hat{G}_s$ connexes $(\supset \hat{T})$
$\supset \hat{H}$

$\hat{H}$ a un groupe dual, "endoscopique" H,
pas une sous-groupe de G.

$\gamma \in \varpi \mathcal{O} \otimes \mathfrak{t}$ $\hookrightarrow G$, $\hookrightarrow H$ $\Longrightarrow$ on a deux fibrés de Springer X_γ^G, X_γ^H

$$\Delta_H^G = \prod_{\alpha \in \Phi(G,T) \setminus \Phi(H,T)/\sim} \partial_\alpha^{\mathrm{val}(\alpha(\gamma))} \in \mathcal{D}(\hat{\mathfrak{t}})$$

facteur de transfert

Thm (GKM) Sous l'hyp. $H^\cdot(X_\gamma^G)$, $H^\cdot(X_\gamma^H)$ purs

Δ_H^G induit un homomorphisme de $\mathcal{O}(\hat{T})$-modules

$$H_\cdot^T(X_\gamma^G) \longrightarrow H^T_{\cdot-2r}(X_\gamma^H)$$

qui devient un isom après complétion au point $s \in \hat{T}$.

$s \leftrightarrow x$

Cor (Dans ce cas) on a un isomorphisme

$$H_{\kappa}^{\cdot-2r}(X_\gamma^H/X_*(T), \mathcal{L}_s^H) \longrightarrow H_{\kappa}^\cdot(X_\gamma^G/X_*(T), \mathcal{L}_\kappa^G)$$

Homologie equiv $\Rightarrow$ Homologie ordinaire $\Rightarrow$

coh. ordinaire + ~~passage~~ à la fibre en $\sigma \in \hat{T}$

$\mathcal{L}$ système locaux de rang 1 et d'ordre ?