B.-C. Ngo : Fibration de Hitchin & endoscopie 6/26/05

Interprétation géométrique d'endoscopie elliptique de Langlands.

X : courbe projective lisse / corps k
D : diviseur de X deg D $\geq 2g-2$
(si $\deg D = 2g-2 \Rightarrow D = K$)

G : reductif connexe / k

$$\mathcal{M} = \left\{ (E, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} E \text{ G-torseur} / X \\ \varphi \in H^0(X, \operatorname{ad} E \otimes \mathcal{O}_X(D)) \end{array} \right\}$$

$\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G \supset \operatorname{Lie} T = \mathfrak{t}$ $k[\mathfrak{g}]^G = k[\mathfrak{t}]^W = k[u_1, \dots u_r]$

u_i homogène de degré m_i

$\chi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{t}/W = \operatorname{Spec} k[\mathfrak{t}]^W$ $t(u_1, \dots u_r) = (t^{m_1} u_1, \dots t^{m_r} u_r)$

$\circlearrowleft \mathbb{G}_m \circlearrowright$

$$\mathcal{M} = \left\{ \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "h_D"', "{[D]}"] & {[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]} \arrow[d] \\ & B\mathbb{G}_m \end{tikzcd} \right\} \xrightarrow{\chi} [(\mathfrak{t}/W)/\mathbb{G}_m] \right\}$$

$\downarrow$

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "h_D"'] & {[(\mathfrak{t}/W)/\mathbb{G}_m]} \arrow[d] \\ & B\mathbb{G}_m \end{tikzcd} \right\} \quad \text{base d'Hitchin}$$

$$k = \mathbb{F}_q \qquad |\mathcal{M}(\mathbb{F}_q)| := \sum_{(E,\varphi) \in \mathcal{M}(\mathbb{F}_q)/\sim} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(E,\varphi)|}$$

(somme divergente) $= \cancel{\mathcal{A}_k}$

(conven)

$$= \sum_{\xi \in \ker^1(F,G)} \; \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}^\xi(F)/\sim} O_\gamma(1_D)$$

- $\ker^1(F,G)$ = G-torseurs $/X$ localement triviaux
$$= \ker\left[H^1(F,G) \longrightarrow \bigoplus H^1(F_v, G)\right]$$

- $\mathfrak{g}^\xi(F)$ la forme de $\mathfrak{g}$ défini par ξ
- γ classe de conj. de $\mathfrak{g}^\xi(F)$

η = Spec F point générique de X

$$O_\gamma(1_D) = \int_{G_\gamma(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)} 1_D(\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma)\,dg\,, \quad \text{divergente sauf si } \gamma \text{ est anisotrope}$$

$$D = \sum d_v v \qquad 1_D = \bigotimes_{v \in |X|} 1_{\varpi^{-d_v}\mathfrak{g}(O_v)}$$

$$a \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_q) = \left\{ X \longrightarrow [(\mathfrak{t}/W)/\mathbb{G}_m] \to B\mathbb{G}_m \right\}$$
$$\cap$$
$$(\mathfrak{t}/W)(F)$$

$$|\mathcal{M}_a(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\xi \in \ker^1(F,G)} \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{g}^\xi(F)/\sim \\ \chi(\gamma) = a}} O_\gamma(1_D)$$

$$\mathcal{A}^{\mathrm{ani}} \subset \mathcal{A}^\heartsuit \subset \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}^\heartsuit = \{ a \in \mathcal{A} \mid a \in (\mathfrak{t}/W)(F) \text{ semi simple régulier}\}$$

$\mathcal{A}^{ami} = \{ a \in \mathcal{A}^{\heartsuit} : a \in (\mathfrak{t}/W)(F)$ anisotrope $\}$

e.g $G = SL(n)$ $\quad a \in \mathcal{A}^{\heartsuit} \Leftrightarrow$ courbe spectrale reduite

$a \in \mathcal{A}^{ami} \Leftrightarrow$ reduite & irreductible

Sp, SO : l'involution agit trivialement sur
$a \in \mathcal{A}^{ami}$ l'ensemble des composants irreductibles
de la courbe spectrale

<u>Theorem</u> $\mathcal{M}^{\heartsuit} = \mathcal{M} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{\heartsuit}$ est lisse (Biswas-Ramanan)

$\mathcal{M}^{ani} \longrightarrow \mathcal{A}^{ani}$ est propre (Faltings)

Stabilisation suivant Langlands et Kottwitz :

$a \in \mathcal{A}^{ani}(\mathbb{F}_q)$ $\quad \gamma_0 \in \mathfrak{g}(F)$ tel que $\chi(\gamma_0) = a$

Rmq : $I_a := I_{\gamma_0}$ centralisateur $\{ g\gamma_0 g^{-1} = \gamma_0 \}$
ne depend pas du choix de γ_0.

$\hat{I}_a$ le tore complexe dual, muni de l'action $\Gamma = Gal(\bar{F}/F)$
$\hat{I}_a^{\Gamma}$ est fini

$\xi \in Ker^1(F, G)$ $\quad \gamma \in \mathfrak{g}^{\xi}(F)$ $\quad \chi(\gamma) = a$

$$\Rightarrow \mathrm{isom}(\gamma_0, \gamma) \in H^1(F, I_a)$$
$$\downarrow$$
$$\xi \in H^1(F, G)$$

$\{ (\xi, \gamma) : \xi \in \mathrm{Ker}^1(F, G),\ \gamma \in \mathfrak{g}^{\xi}(F)/\sim,\ \chi(\gamma) = a \}$

$= \mathrm{Ker}\left(H^1(F, I_a) \longrightarrow \bigoplus_v H^1(F_v, G) \right)$

$v \in |X|$ $\quad \gamma_v \in \mathfrak{g}(F_v)/\sim \qquad \chi(\gamma_v) = a$

$\alpha_v = \mathrm{inv}(\gamma, \gamma_v) \in \mathrm{Ker}\left[H^1(F_v, I_a) \to H^1(F_v, G) \right]$

$\Leftrightarrow \quad \alpha_v \in \hat{I}_a^{\Gamma_v} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

Par collection $\gamma_v \in \mathfrak{g}(F_v)/\sim \quad \chi(\gamma_v) = a$

provenant d'une paire $(\xi, \gamma) \Leftrightarrow$

$\sum_{v \in |X|} \alpha_v |_{\hat{I}_a^\Gamma} = 0$

... dans ce cas $\#(\xi, \gamma) \mapsto (\gamma_v)$ égal $|\mathrm{Ker}^1(F, I_a)|$

Ono : $|\mathrm{Ker}^1(F, I_a)|\ \tau(I_a) = |\hat{I}_a^\Gamma|$

$\rightsquigarrow \quad |M_a(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\kappa \in \hat{I}_a^\Gamma} O_a^\kappa(1_D)$

Globalement $|M(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{[\kappa] \in \hat{G}/\sim \\ \kappa \text{ d'ordre fini}}} \sum_{a \in A^{\mathrm{ani}}(\mathbb{F}_q)} \sum_{\kappa \in \hat{I}_a^\Gamma} O_a^\kappa(1_D)$

$\rightsquigarrow$ décomposition de $f_* \mathbb{Q}_p$ par $[\kappa] \in \hat{G}/\sim$

$\hat{I}_a^\Gamma \cap [\kappa]$ est non vide $\qquad (\rho_a : \Gamma \to W,\ W_a = \mathrm{Im}\,\rho_a)$

$\Downarrow \quad W_a \subset$ conjugué W_κ

Si $W_a = W_\kappa \Rightarrow |\hat{I}_a^\Gamma \cap [\kappa]| = \dfrac{|\mathrm{Nor}(W_\kappa)|}{|W_\kappa|}$

Decomposition de $f_* \mathbb{Q}_\ell$, $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}$:

Symetrie de f

e.g. $G = GL_n$ $\quad a = (a_i) \in \mathcal{A}(\bar{k})$

courbe spectrale $\quad Y_a = \{ t^n - a_1 t^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n = 0 \}$

$\mathcal{M}_a = \{ \mathcal{O}_{Y_a}$ - modules sans torsion de rang 1 $\}$

$\cup$

$P_a = \{ \mathcal{O}_{Y_a}$ - modules inversibles $\}$

$\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\ G$

$I \longrightarrow \mathfrak{g}$ $\quad$ schema en groupes de centralisateurs

$I_x = \{ g \in G : \mathrm{Ad}(g) x = x \}$

$\mathfrak{g}^{reg} = \{ x / \dim I_x = \mathrm{rang}(G) \}$

<u>Lemme</u> Il existe un unique schema en groupes lisse J sur $\mathfrak{t}/W$ muni d'un homomorphisme G-equivariant $\chi^* J \longrightarrow J$ qui est un isomorphisme sur $\mathfrak{g}^{reg}$.

e.g. $\mathfrak{gl}_n$: $\quad J_a = \left(k[t] / \mathrm{char}\ a \right)^*$

si $(E, \varphi) \in \mathcal{M}(\bar{k}) \longmapsto a \in \mathcal{A}(\bar{k})$

$X \xrightarrow{a} [(\mathfrak{t}/W) / \mathbb{G}_m]$

$\Longrightarrow J_a = a^* J \qquad P_a = \{ J_a\text{-torseurs} \}$

remplace le Picard spectrale

$\mathrm{Aut}(E, \varphi) = h_{E,\varphi}^{*} (I)$ où $X \xrightarrow{h_{E,\varphi}} [\mathfrak{g} / G \times \mathbb{G}_m]$

(E, φ)

$\Rightarrow$ action de P_a sur M_a.

Sur l'ouvert $\mathcal{A}^\heartsuit$ $P^\heartsuit \longrightarrow \mathcal{A}^\heartsuit$ est lisse

Grothendieck: il existe un sous schema en groupes

$P_0^\heartsuit \subset P^\heartsuit$, fibre par fibre $(P_0)_a = (P_a)_0$

... faisceau $\pi_0(P)$ pour la topologie étale de $\mathcal{A}^\heartsuit$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{V} & \longrightarrow & \tilde{X} & \longrightarrow & [\mathfrak{t}/G_m] \\ \downarrow & \square & \downarrow \pi & \square & \downarrow \nu \\ V & \longrightarrow & X \times \mathcal{A}^\heartsuit & \longrightarrow & [\mathfrak{t}/W/G_m] \end{array}$$

V est l'ouvert où π est étale

$\Rightarrow$ faisceau $\pi_0(\tilde{V}/\mathcal{A}^\heartsuit)_a = \pi_0(\tilde{V}_a) \circlearrowleft W$ agit transitivement fibre par fibre

Proposition $\exists$ homomorphisme surjectif

$$\mathbb{X}^\vee \times^W \pi_0(\tilde{V}) \longrightarrow \pi_0(P) \qquad (\text{Donagi-Gaitsgory})$$

isom. si G est adjoint

$\mathbb{X}^\vee$ = cocharacters of T

$u, d \longmapsto \mathcal{O}(du)$

définition de flèche : $U \times \mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Pic} X/S$

lisse $X = U \subset X$ courbe propre

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ X & & \pi_0(U) \times \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_0 \operatorname{Pic} X/S \\ \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

$\rho_a : \Gamma \to W \hookrightarrow J_a$ $\qquad W_a = \operatorname{Im} \rho_a$

$\Rightarrow \pi_0(P_a) = (\mathbb{X}_*)_{W_a}$ $\qquad$ Kottwitz

$P_a \curvearrowright H^i(\mathcal{M}_a, \mathbb{Q}_\ell)$ à travers $\pi_0(P_a)$

$\quad\quad\quad\quad\;\; \| $

$\quad\quad \bigoplus H^i(\mathcal{M}_a, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa)$ décomposition

$\kappa : \pi_0(P_a) \to \mathbb{Q}_\ell^\times$

$$f_* \mathbb{Q}_\ell = \bigoplus_{[\kappa]} (f_* \mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$$ en failles.

Stratification de $\mathcal{A}^{ani} = \coprod_{\Sigma \subset W} \mathcal{A}_{[\Sigma]}$

sous groupe de W à conjugaison près

<u>Prop</u> $(f_*^{ani} \mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$ est supporté par $\overline{\mathcal{A}}_{[W_\kappa]}$.

<u>Conjecture (optimiste)</u> Tous les facteurs directs de $(f_*^{ani} \mathbb{Q}_\ell)_{[\kappa]}$ ont le support $\overline{\mathcal{A}}_{[W_\kappa]}$.

$\kappa \in \hat{G}/\sim \; = \hat{T}/W$ dual.

$W_\kappa = \{ w \in W \mid w(\kappa) = \kappa \}$

G adjoint $\kappa \in \hat{G}$ $\hat{H} = \hat{G}_\kappa$ semi-simple

& H dual déployé de $\hat{H}$.

$\Rightarrow$ version (X, D, H) (Hitchin pour le groupe endoscopique)

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{N} = \mathcal{M}_H & & \mathcal{M} \\
{\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{B} = \mathcal{A}_H & \xrightarrow[\pi_{W_H}]{} & \mathcal{A}
\end{array}$$

morphisme net à image $\overline{\mathcal{A}}_{[W_H]}$, étale sur $\mathcal{A}_{W_H}$ de degré $\dfrac{|\mathrm{Norm}_W(W_H)|}{|W_H|}$

Conj Il existe • un entier naturel d • un système local de rang 1 et d'ordre 2 sur $\mathcal{B}_{W_H}$

• un $Z_{\hat{H}}$ - torseur $\underline{\Upsilon}$ sur $\mathcal{B}_{W_H}$

tel qu'il existe un isom de faisceaux pervers galois

$$\left[\left(g_*^{\mathrm{ani}} \mathbb{Q}_\ell \right)_K^{\Upsilon} \otimes \mathcal{I}[-2d](-d) \right] \xrightarrow{\sim} \left(\pi_{W_H}^* f_*^{\mathrm{ani}} \mathbb{Q}_\ell \right)_K .$$

- vrai dans le cas unitaire (Laumon - Ngo)